

2016 考研数学 (一) 试题

一、选择题: 1~8 小题, 每小题 4 分, 共 32 分. 下列每题给出的四个选项中, 只有一个选项是符合题目要求的.

(1) 若反常积分 $\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^a(1+x)^b} dx$ 收敛, 则

- (A) $a < 1$ 且 $b > 1$. (B) $a > 1$ 且 $b > 1$.
(C) $a < 1$ 且 $a+b > 1$. (D) $a > 1$ 且 $a+b > 1$.

(2) 已知函数 $f(x) = \begin{cases} 2(x-1), & x < 1, \\ \ln x, & x \geq 1, \end{cases}$ 则 $f(x)$ 的一个原函数是

- (A) $F(x) = \begin{cases} (x-1)^2, & x < 1. \\ x(\ln x - 1), & x \geq 1. \end{cases}$ (B) $F(x) = \begin{cases} (x-1)^2, & x < 1. \\ x(\ln x - 1) - 1, & x \geq 1. \end{cases}$
(C) $F(x) = \begin{cases} (x-1)^2, & x < 1. \\ x(\ln x + 1) + 1, & x \geq 1. \end{cases}$ (D) $F(x) = \begin{cases} (x-1)^2, & x < 1. \\ x(\ln x - 1) + 1, & x \geq 1. \end{cases}$

(3) 若 $y = (1+x^2)^2 - \sqrt{1+x^2}$, $y = (1+x^2)^2 + \sqrt{1+x^2}$ 是微分方程 $y' + p(x)y = q(x)$ 的两个解, 则 $q(x) =$

- (A) $3x(1+x^2)$. (B) $-3x(1+x^2)$.
(C) $\frac{x}{1+x^2}$. (D) $-\frac{x}{1+x^2}$.

(4) 已知函数 $f(x) = \begin{cases} x, & x \leq 0, \\ \frac{1}{n}, & \frac{1}{n+1} < x \leq \frac{1}{n}, n=1, 2, \dots, \end{cases}$ 则

- (A) $x=0$ 是 $f(x)$ 的第一类间断点. (B) $x=0$ 是 $f(x)$ 的第二类间断点.
(C) $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续但不可导. (D) $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导.
(5) 设 A, B 是可逆矩阵, 且 A 与 B 相似, 则下列结论错误的是
(A) A^T 与 B^T 相似 (B) A^{-1} 与 B^{-1} 相似
(C) $A+A^T$ 与 $B+B^T$ 相似 (D) $A+A^{-1}$ 与 $B+B^{-1}$ 相似

(6) 设二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 4x_2x_3$, 则 $f(x_1, x_2, x_3) = 2$

在空间直角坐标下表示的二次曲面为

- (A) 单叶双曲面 (B) 双叶双曲面
(C) 椭球面 (D) 柱面

(7) 设随机变量 $X \sim N(\mu, \sigma^2) (\sigma > 0)$, 记 $p = P\{X \leq \mu + \sigma^2\}$, 则

(A) p 随着 μ 的增加而增加 (B) p 随着 σ 的增加而增加

(C) p 随着 μ 的增加而减少 (D) p 随着 σ 的增加而减少

(8) 随机试验 E 有三种两两不相容的结果 A_1, A_2, A_3 , 且三种结果发生的概率均为 $\frac{1}{3}$ 。将试验 E 独立重复做 2 次, X 表示 2 次试验中结果 A_1 发生的次数,

Y 表示 2 次试验中结果 A_2 发生的次数, 则 X 与 Y 的相关系数为

(A) (B) (C) (D)

二、填空题: 9~14 小题, 每小题 4 分, 共 24 分.

(9) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x t \ln(1+t \sin t) dt}{1 - \cos x^2} = \underline{\hspace{2cm}}$.

(10) 向量场 $A(x, y, z) = (x + y + z)i + xyj + zk$ 的旋度 $\text{rot}A = \underline{\hspace{2cm}}$.

(11) 设函数 $f(u, v)$ 可微, $z = z(x, y)$ 由方程 $(x+1)z - y^2 = x^2 f(x-z, y)$ 确定, 则

$dz|_{(0,1)} = \underline{\hspace{2cm}}$.

(12) 设函数 $f(x) = \arctan x - \frac{x}{1+ax^2}$, 且 $f''(0) = 1$, 则 $a = \underline{\hspace{2cm}}$.

(13) 行列式 $\begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & -1 \\ 4 & 3 & 2 & \lambda+1 \end{vmatrix} = \underline{\hspace{2cm}}$.

(14) 设 x_1, x_2, \dots, x_n 为来自总体 $N(\mu, \sigma^2)$ 的简单随机样本, 样本均值 $\bar{x} = 9.5$, 参数 σ 置信度为 0.95 的双侧置信区间的置信上限为 10.8, 则 μ 的置信度为 0.95 的双侧置信区间为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

三、解答题: 15~23 小题, 共 94 分, 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

(15) (本题满分 10 分)

已知平面区域 $D = \{(r, \theta) | 2 \leq r \leq 2(1 + \cos \theta), -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}\}$, 计算二重积分 $\iint_D x dx dy$

. (16) (本题满分 10 分)

设函数 $y(x)$ 满足方程 $y'' + 2y' + ky = 0$, 其中 $0 < k < 1$.

(I) 证明: 反常积分 $\int_0^{+\infty} y(x)dx$ 收敛;

(II) 若 $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$, 求 $\int_0^{+\infty} y(x)dx$ 的值.

(17) (本题满分 10 分)

设函数 $f(x, y)$ 满足 $\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = (2x+1)e^{2x-y}$, 且 $f(0, y) = y+1$, L_t 是从点

$(0, 0)$ 到点 $(1, t)$ 的光滑曲线。计算曲线积分 $I(t) = \int_{L_t} \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} dx + \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} dy$, 并

求 $I(t)$ 的最小值。

(18) (本题满分 10 分)

设有界区域 Ω 由平面 $2x + y + 2z = 2$ 与三个坐标平面围成, Σ 为 Ω 整个表面的外侧, 计算曲面积分 $I = \iint_{\Sigma} (x^2 + 1)dydz - 2ydzdx + 3zdx dy$ 。

(17) (本题满分 10 分)

设函数 $f(x, y)$ 满足 $\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = (2x+1)e^{2x-y}$, 且 $f(0, y) = y+1$, L_t 是从点

$(0, 0)$ 到点 $(1, t)$ 的光滑曲线。计算曲线积分 $I(t) = \int_{L_t} \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} dx + \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} dy$, 并

求 $I(t)$ 的最小值。

(18) (本题满分 10 分)

设有界区域 Ω 由平面 $2x + y + 2z = 2$ 与三个坐标平面围成, Σ 为 Ω 整个表面的外侧, 计算曲面积分 $I = \iint_{\Sigma} (x^2 + 1)dydz - 2ydzdx + 3zdx dy$ 。

(21) (本题满分 11 分)

已知矩阵 $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

(I) 求 A^{99}

(II) 设 3 阶矩阵 $B = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ 满足 $B^2 = BA$ 。记 $B^{100} = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)$, 将

$\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 分别表示为 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 的线性组合。

(22) (本题满分 11 分)

设二维随机变量 (X, Y) 在区域 $D = \{(x, y) | 0 < x < 1, x^2 < y < \sqrt{x}\}$ 上服从均匀分

布, 令 $U = \begin{cases} 1, & X \leq Y. \\ 0, & X > Y. \end{cases}$

(I) 写出 (X, Y) 的概率密度;

(II) 问 U 与 X 是否相互独立? 并说明理由;

(III) 求 $Z = U + X$ 的分布函数 $F(z)$.

(23) (本题满分 11 分)

设总体的概率密度为 $f(x, \theta) = \begin{cases} \frac{3x^2}{\theta^3}, & 0 < x < \theta, \text{ 其中 } \theta \in (0, +\infty) \text{ 为未知参数,} \\ 0, & \text{其他,} \end{cases}$

X_1, X_2, X_3 为来自总体 X 的简单随机样本, 令 $T = \max(X_1, X_2, X_3)$,

(I) 求 T 的概率密度;

(II) 确定 a , 使得 aT 为 θ 的无偏估计。