

2011 年考研数学三真题

一. 选择题

1. 已知当 $x \rightarrow 0$ 时, 函数 $f(x) = 3 \sin x - \sin 3x$ 与 cx^k 是等价无穷小, 则

(A) $k=1, c=4$ (B) $k=1, c=-4$

(C) $k=3, c=4$ (D) $k=3, c=-4$

2. 已知 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导, 且 $f(0)=0$, 则 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 f(x) - 2f(x^3)}{x^3} =$

(A) $-2f'(0)$ (B) $-f'(0)$

(C) $f'(0)$ (D) 0

3. 设 $\{u_n\}$ 是数列, 则下列命题正确的是

(A) 若 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} (u_{2n-1} + u_{2n})$ 收敛

(B) 若 $\sum_{n=1}^{\infty} (u_{2n-1} + u_{2n})$ 收敛, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛

(C) 若 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} (u_{2n-1} - u_{2n})$ 收敛

(D) 若 $\sum_{n=1}^{\infty} (u_{2n-1} - u_{2n})$ 收敛, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛

4. 设 $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln \sin x dx$, $J = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln \cot x dx$, $K = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln \cos x dx$, 则 I, J, K 的大小关系是

(A) $I < J < K$

(B) $I < K < J$

(C) $J < I < K$

(D) $K < J < I$

5. 设 A 为 3 阶矩阵, 将 A 的第二列加到第一列得矩阵 B , 再交换 B 的第二行与第一行得单位矩

阵. 记 $P_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $P_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, 则 $A =$

(A) $P_1 P_2$

(B) $P_1^{-1} P_2$

(C) P_2P_1

(D) $P_2^{-1}P_1$

6. 设 A 为 4×3 矩阵, η_1, η_2, η_3 是非齐次线性方程组 $Ax = \beta$ 的 3 个线性无关的解, k_1, k_2 为任意常数, 则 $Ax = \beta$ 的通解为

(A) $\frac{\eta_2 + \eta_3}{2} + k_1(\eta_2 - \eta_1)$

(B) $\frac{\eta_2 - \eta_3}{2} + k_2(\eta_2 - \eta_1)$

(C) $\frac{\eta_2 + \eta_3}{2} + k_1(\eta_3 - \eta_1) + k_2(\eta_2 - \eta_1)$

(D) $\frac{\eta_2 - \eta_3}{2} + k_2(\eta_2 - \eta_1) + k_3(\eta_3 - \eta_1)$

7. 设 $F_1(x), F_2(x)$ 为两个分布函数, 其相应的概率密度 $f_1(x), f_2(x)$ 是连续函数, 则必为概率密度的是

(A) $f_1(x)f_2(x)$

(B) $2f_2(x)F_1(x)$

(C) $f_1(x)F_2(x)$

(D) $f_1(x)F_2(x) + f_2(x)F_1(x)$

8. 设总体 X 服从参数为 $\lambda (\lambda > 0)$ 的泊松分布, $X_1, X_2, \dots, X_n (n \geq 2)$ 为来自总体的简单随机样本, 则对应的统计量 $T_1 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i, T_2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n-1} X_i + \frac{1}{n} X_n$

(A) $ET_1 > ET_2, DT_1 > DT_2$

(B) $ET_1 > ET_2, DT_1 < DT_2$

(C) $ET_1 < ET_2, DT_1 > DT_2$

(D) $ET_1 < ET_2, DT_1 < DT_2$

二、填空题

9. 设 $f(x) = \lim_{t \rightarrow 0} x(1+3t)^{\frac{x}{t}}$, 则 $f'(x) =$ _____

10. 设函数 $z = (1 + \frac{x}{y})^y$, 则 $dz \Big|_{(1,0)} =$ _____

11. 曲线 $\tan(x + y + \frac{\pi}{4}) = e^y$ 在点 $(0,0)$ 处的切线方程为 _____

12. 曲线 $y = \sqrt{x^2 - 1}$, 直线 $x = 2$ 及 x 轴所围成的平面图形绕 x 轴旋转所成的旋转体的体积为 _____

13. 设二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = x^T Ax$ 的秩为 1, A 中行元素之和为 3, 则 f 在正交变换下 $x = Qy$ 的标准为 _____

14. 设二维随机变量 (X, Y) 服从 $N(\mu, \mu; \sigma^2, \sigma^2; 0)$, 则 $E(XY^2) =$ _____

三、解答题

15. 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+2\sin x} - x - 1}{x \ln(1+x)}$

16. 已知函数 $f(u, v)$ 具有连续的二阶偏导数, $f(1, 1) = 2$ 是 $f(u, v)$ 的极值,

$z = f[(x+y), f(x, y)]$. 求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \Big|_{(1,1)}$

17. 求 $\int \frac{\arcsin \sqrt{x} + \ln x}{\sqrt{x}} dx$

18. 证明 $4 \arctan x - x + \frac{4\pi}{3} - \sqrt{3} = 0$ 恰有 2 实根.

19. $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 有连续的导数, $f(0) = 1$ $\iint_{D_t} f'(x+y) dx dy = \iint_{D_t} f'(x+y) dx dy$

$D_t = \{(x, y) | 0 \leq y \leq t, 0 \leq x \leq t\} (0 < t \leq 1)$, 求 $f(x)$ 的表达式.

20. $\alpha_1 = (1, 0, 1)^T, \alpha_2 = (0, 1, 1)^T, \alpha_3 = (1, 3, 5)^T$ 不能由 $\beta_1 = (1, a, 1)^T, \beta_2 = (1, 2, 3)^T, \beta_3 = (1, 3, 5)^T$

线性表出. ①求 a ; ②将 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表出.

21. A 为三阶实矩阵, $R(A) = 2$, 且 $A \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

(1) 求 A 的特征值与特征向量 (2) 求 A

22.

X	0	1
P	1/3	2/3

Y	-1	0	1
P	1/3	1/3	1/3

$P(X^2 = Y^2) = 1$

求: (1) (X, Y) 的分布; (2) $Z = XY$ 的分布; (3) ρ_{XY} .

23. (X, Y) 在 G 上服从均匀分布, G 由 $x - y = 0, x + y = 2$ 与 $y = 0$ 围成.

①求边缘密度 $f_X(x)$; ②求 $f_{X|Y}(x|y)$

