2011年考研数学试题（数学一）

一、选择题

1、 曲线 $y=(x-1)(x-2)^2(x-3)^3(x-4)^4$ 的拐点是（　　）

（A）（1，0）　　（B）（2，0）　　（C）（3，0）　　（D）（4，0）

2、 设数列 $\{a_n\}$ 单调减少，$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$，$S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}a_k\,(n=1,2\cdots\cdots)$ 无界，则幂级数

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n(x-1)^n$ 的收敛域为（　　）　（A）（-1，1]　　（B）[-1，1)　　（C）[0，2)

（D）(0，2]

3、 设 函数 $f(x)$ 具有二阶连续导数，且 $f(x)>0$，$f(0)'=0$，则函数 $z=f(x)\ln f(y)$ 在点 $(0,0)$ 处取得极小值的一个充分条件是（　　）

（A） $f(0)>1$ $f''(0)>0$　　（B） $f(0)>1$ $f''(0)<0$

（C） $f(0)<1$ $f''(0)>0$　　（D） $f(0)<1$ $f''(0)<0$

4、设 $I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\sin xdx, J=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\cot xdx, K=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\cos xdx$，则 I,J,K 的大小关系是（　）

（A）$I<J<K$　（B）$I<K<J$　（C）$J<I<K$　（D）$K<J<I$

5. 设 A 为 3 阶矩阵，将 A 的第二列加到第一列得矩阵 B，再交换 B 的第二行与第一行得单位矩阵. 记 $P_1=\begin{bmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$, $P_2=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{bmatrix}$, 则 $A=$（　　）

（A）P_1P_2　　（B）$P_1^{-1}P_2$　　（C）P_2P_1　　（D）$P_2^{-1}P_1$

6、设 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)$ 是 4 阶矩阵，A^* 为 A 的伴随矩阵，若 $(1,0,1,0)^T$ 是方程组 $Ax=0$ 的一个基础解系，则 $A^*x=0$ 基础解系可为（　　）

(A) α_1 α_3　　(B) α_1 α_2　　(C) α_1 α_2 α_3　　(D) α_2 α_3 α_4

7、设 $F_1(x),F_2(x)$ 为两个分布函数，其相应的概率密度 $f_1(x),f_2(x)$ 是连续函数，则必为概率密度的是（　）

（A） $f_1(x)f_2(x)$　　　　（B） $2f_2(x)F_1(x)$

（C） $f_1(x)F_2(x)$　　　　（D） $f_1(x)F_2(x)+f_2(x)F_1(x)$

8、设随机变量 X 与 Y 相互独立，且 EX 与 EY 存在，记 $U=\max\{x,y\}, V=\min\{x,y\}$，则 $E(UV)=$（　）

(A) $EUEV$　(B) $EXEY$　(C) $EUEY$　(D) $EXEV$

二、填空题

9、曲线 $y=\int_0^x \tan t dt\left(0\le x\le\dfrac{\pi}{4}\right)$ 的弧长 $s=$____________________

10、微分方程 $y'+y=e^{-x}\cos x$ 满足条件 $y(0)=0$ 的解为 $y=$____________

11、设函数 $F(x,y)=\int_0^{xy}\dfrac{\sin t}{1+t^2}dt$，则 $\left.\dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2}\right|_{\substack{x=0\\y=2}}=$____________

12、设 L 是柱面方程 $x^2+y^2=1$ 与平面 $z=x+y$ 的交线，从 z 轴正向往 z 轴负向看去为逆时针方向，则曲线积分 $\oint_L xzdx+xdy+\dfrac{y^2}{2}dz=$____________

13、若二次曲面的方程为 $x^2+3y^2+z^2+2axy+2xz+2yz=4$，经正交变换化为 $y_1^2+4z_1^2=4$，则 $a=$___

14、设二维随机变量 (X,Y) 服从 $N(\mu,\mu;\sigma^2,\sigma^2;0)$，则 $E(XY^2)=$_____________

三、解答题

15、（本题满分 10 分）求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\ln(1+x)}{x}\right)^{\frac{1}{e^x-1}}$

16、（本题满分 9 分）设 $z=f(xy,yg(x))$，其中函数 f 具有二阶连续偏导数，函数 $g(x)$ 可导，且在 $x=1$ 处取得极值 $g(1)=1$，求 $\left.\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right|_{x=1,y=1}$

17、（本题满分 10 分）求方程 $k\arctan x-x=0$ 不同实根的个数，其中 k 为参数

18、（本题满分 10 分）证明：（1）对任意正整数 n，都有 $\dfrac{1}{n+1}<\ln(1+\dfrac{1}{n})<\dfrac{1}{n}$

（2）设 $a_n = 1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln n(n=1,2,\cdots)$，证明数列 $\{a_n\}$ 收敛

19、（本题满分 11 分）已知函数 $f(x,y)$ 具有二阶连续偏导数，且 $f(1,y)=0, f(x,1)=0$

，$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = a$，其中 $D=\{(x,y)\,|\,0\le x\le 1, 0\le y\le 1\}$，计算二重积分

$I=\iint\limits_D xyf_{xy}''(x,y)dxdy$

20、（本题满分 11 分）$\alpha_1=\left(1,0,1\right)^T, \alpha_2=\left(0,1,1\right)^T, \alpha_3=\left(1,3,5\right)^T$ 不能由

$\beta_1=\left(1,a,1\right)^T, \beta_2=\left(1,2,3\right)^T, \beta_3=\left(1,3,5\right)^T$ 线性表出。①求 a；②将 β_1,β_2,β_3 由

$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表出。

21、（本题满分 11 分）A 为三阶实矩阵，$R(A)=2$，且 $A\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 0\\ -1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 0 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}$

（1）求 A 的特征值与特征向量（2）求 A

22. （本题满分 11 分）

X	0	1
P	1/3	2/3

Y	-1	0	1
P	1/3	1/3	1/3

$P\left(X^2=Y^2\right)=1$

求：（1）$\left(X,Y\right)$ 的分布；

（2）$Z=XY$ 的分布；

（3）ρ_{XY}.

23、（本题满分 11 分）设 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 为来自正态总体 $N(\mu_0,\sigma^2)$ 的简单随机样本，其中

μ_0 已知，$\sigma^2 > 0$ 未知，$\overline{x}$ 和 S^2 分别表示样本均值和样本方差，

（1）求参数 σ^2 的最大似然估计 $\hat{\sigma}^2$

（2）计算 $E(\hat{\sigma}^2)$ 和 $D(\hat{\sigma}^2)$