

2011 年全国硕士研究生入学统一考试

数学二试题

一、选择题：下列每题给出的四个选项中。只有一个选项符合题目要求。

(1) 已知当 $x \rightarrow 0$ 时 $f(x) = 3\sin x - \sin 3x$ 与 cx^k 是等价无穷小，则 ()。

- (A) $k=1, c=4$ (B) $k=1, c=-4$
 (C) $k=3, c=4$ (D) $k=3, c=-4$

(2) 已知 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导，且 $f(0)=0$ 。则 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 f(x) - 2f(x^3)}{x^3} = ()$ 。

- (A) $-2f'(0)$ (B) $-f'(0)$
 (C) $f'(0)$ (D) 0

(3) 函数 $f(x) = \ln |(x-1)(x-2)(x-3)|$ 的驻点个数为 ()。

- (A) 0 (B) 1
 (C) 2 (D) 3

(4) 微分方程 $y'' - \lambda^2 y = e^{\lambda x} + e^{-\lambda x}$ ($\lambda > 0$) 的特解形式为 ()。

- (A) $a(e^{\lambda x} + e^{-\lambda x})$ (B) $ax(e^{\lambda x} + e^{-\lambda x})$
 (C) $x(ae^{\lambda x} + be^{-\lambda x})$ (D) $x^2(ae^{\lambda x} + be^{-\lambda x})$

(5) 设函数 $f(x), g(x)$ 均有二阶连续导数，满足 $f(0) > 0, g(0) < 0$ ，且 $f'(0) = g'(0) = 0$ 。则函数 $Z = f(x)g(y)$ 在点 $(0, 0)$ 处取得极小值的一个充分条件是 ()。

- (A) $f''(0) < 0, g''(0) > 0$ (B) $f''(0) < 0, g''(0) < 0$
 (C) $f''(0) > 0, g''(0) > 0$ (D) $f''(0) > 0, g''(0) < 0$

(6) 设 $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln \sin x dx, J = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln \cot x dx, K = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln \cos x dx$ 。则 I, J, K 的大小关系是 ()。

- (A) $I < J < K$ (B) $I < K < J$
 (C) $J < I < K$ (D) $K < J < I$

(7) 设 A 为三阶矩阵，将 A 的第 2 列加到第 1 列得矩阵 B 。再交换 B 的第

$$P_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, P_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

2 行与第 3 行得单位矩阵，记

- (A) $P_1 P_2$ (B) $P_1^{-1} P_2$
 (C) $P_2 P_1$ (D) $P_2 P_1^{-1}$

(8) 设 $A = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$ 是四阶矩阵， A^* 为 A 的伴随矩阵，若 $(1, 0, 1, 0)$ 是方程组 $Ax = 0$ 的一个基础解系，则 $A^*x = 0$ 的基础解系可为 ()。

- (A) α_1, α_3 (B) α_1, α_2
 (C) $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ (D) $\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$

二、填空题

(9) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1+2^x}{2} \right)^{\frac{1}{x}} = \underline{\hspace{2cm}}$.

(10) 微分方程 $y' + y = e^{-x} \cos x$ 满足条件 $y(0) = 0$ 的解为 $y = \underline{\hspace{2cm}}$.

(11) 曲线 $y = \int_0^x \tan t dt \left(0 \leq x \leq \frac{\pi}{4} \right)$ 的弧长 $s = \underline{\hspace{2cm}}$.

(12) 设函数 $f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}, \lambda > 0.$ 则 $\int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx = \underline{\hspace{2cm}}$.

(13) 设平面区域 D 由直线 $y=x$, 圆 $x^2+y^2=2y$ 及 y 轴所组成, 则二重积分 $\iint_D xy d\sigma = \underline{\hspace{2cm}}$.

(14) 二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 3x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3$, 则 f 的正惯性指数为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

三、解答题解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

(15) 已知函数 $F(x) = \frac{\int_0^x \ln(1+t^2) dt}{x^\alpha}$. 设 $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} F(x) = 0$, 试求 α 的取值范围.

(16) 设函数 $y=y(x)$ 由参数方程 $\begin{cases} x = \frac{1}{3}t^3 + t + \frac{1}{3}, \\ y = \frac{1}{3}t^3 - t + \frac{1}{3} \end{cases}$ 确定, 求 $y=y(x)$ 的极值和曲线 $y=y(x)$ 的凹凸区间及拐点.

(17) 设函数 $Z=f(xy, yg(x))$, 其中函数 f 具有二阶连续偏导数, 函数 $g(x)$ 可导且在 $x=1$ 处取得极值 $g(1)=1$, 求 $\left. \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \right|_{x=1, y=1}$.

(18) 设函数 $y(x)$ 具有二阶导数, 且曲线 $l: y=y(x)$ 与直线 $y=x$ 相切于原点, 记 α 为曲线 l 在点 (x, y) 外切线的倾角, 若 $\frac{d\alpha}{dx} = \frac{dy}{dx}$. 求 $y(x)$ 的表达式.

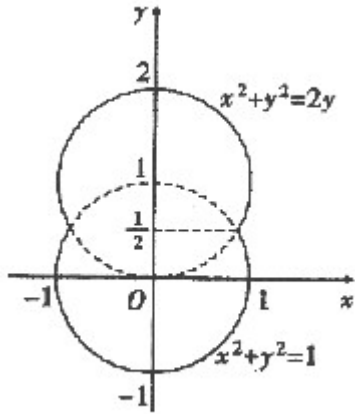
(19) ①证明: 对任意的正整数 n , 都有 $\frac{1}{n+1} < \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n}$ 成立.

② 设 $a_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} - \ln n$ ($n=1, 2, \dots$), 证明数列 $\{a_n\}$ 收敛.

(20) 一容器的内侧是由图中曲线 y 轴旋转一周而成的曲面, 该曲线由 $x^2+y^2=2y$ ($y \geq \frac{1}{2}$) 与 $x^2+y^2=1$ ($y \leq \frac{1}{2}$) 连接而成.

(I) 求容器的容积;

(II) 若将容器内盛满的水从容器顶部全部抽出, 至少需要做多少功?(长度单位: m . 重力加速度为 gm/s^2 , 水的密度为 $10^3kg/m^3$).



20 题图

(21) 已知函数 $f(x, y)$ 具有二阶连续偏导数, 且 $f(1, y)=0$, $f(x, 1)=0$,

$$\iint_D f(x, y) dx dy = a$$

其中 $D = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$, 计算二重积分

$$I = \iint_D xy f_{xy}''(x, y) dx dy.$$

(22) 设向量组 $\alpha_1 = (1, 0, 1)^T$, $\alpha_2 = (0, 1, 1)^T$, $\alpha_3 = (1, 3, 5)^T$, 不能由向量组 $\beta_1 = (1, 1, 1)^T$, $\beta_2 = (1, 2, 3)^T$, $\beta_3 = (3, 4, a)^T$ 线性表示

(I) 求 a 的值;

(II) 将 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 用 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示.

(23) 设 A 为三阶实矩阵, A 的秩为 2, 且

$$A \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

(I) 求 A 的特征值与特征向量;

(II) 求矩阵 A .