

2014 年全国硕士研究生入学统一考试数学一试题

一、选择题：1~8 小题，每小题 4 分，共 32 分，下列每题给出四个选项中，只有一个选项符合题目要求的，请将所选项的字母填在答题纸指定位置上。

(1) 下列曲线中有渐近线的是

- (A) $y = x + \sin x$. (B) $y = x^2 + \sin x$. (C) $y = x + \sin \frac{1}{x}$. (D)

$$y = x^2 + \sin \frac{1}{x}.$$

(2) 设函数 $f(x)$ 具有 2 阶导数， $g(x) = f(0)(1-x) + f(1)x$ ，则在区间 $[0, 1]$ 上 ()

(A) 当 $f'(x) \geq 0$ 时， $f(x) \geq g(x)$. (B) 当 $f'(x) \geq 0$ 时， $f(x) \leq g(x)$

(C) 当 $f'(x) \geq 0$ 时， $f(x) \geq g(x)$. (D) 当 $f' \geq 0$ 时， $f(x) \leq g(x)$

(3) 设 $f(x, y)$ 是连续函数，则 $\int_0^1 dy \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{1-y} f(x, y) =$

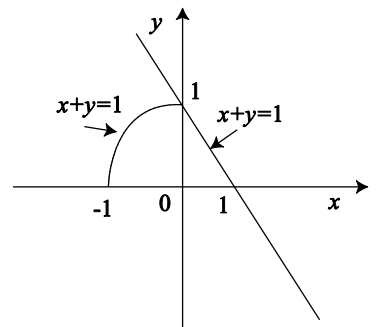
(A) $\int_0^1 dx \int_1^{x-1} f(x, y) dy + \int_{-1}^0 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x, y) dy$.

(B) $\int_0^1 dx \int_0^{1-x} f(x, y) dy + \int_{-1}^0 dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^0 f(x, y) dy$.

(C) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{\frac{1}{\cos\theta + \sin\theta}} f(r \cos\theta, r \sin\theta) r dr + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} d\theta \int_0^1 f(r \cos\theta, r \sin\theta) r dr$.

(D)

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{\frac{1}{\cos\theta + \sin\theta}} f(r \cos\theta, r \sin\theta) r dr + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} d\theta \int_0^1 f(r \cos\theta, r \sin\theta) r dr.$$



(4) 若 $\int_{-\pi}^{\pi} (x - a_1 \cos x - b_1 \sin x)^2 dx = \min_{a, b \in \mathbb{R}} \left\{ \int_{-\pi}^{\pi} (x - a \cos x - b \sin x)^2 dx \right\}$ ，则

$$a_1 \cos x + b_1 \sin x =$$

- (A) $2\pi \sin x$. (B) $2 \cos x$. (C) $2\pi \sin x$. (D) $2\pi \cos x$.

(5) 行列式
$$\begin{vmatrix} 0 & a & b & 0 \\ a & 0 & 0 & b \\ 0 & c & d & 0 \\ c & 0 & 0 & d \end{vmatrix} =$$

- (A) $(ad-bc)^2$ (B) $-(ad-bc)^2$ (C) $a^2d^2-b^2c^2$ (D) $b^2c^2-a^2d^2$

(6) 设 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 均为 3 维向量，则对任意常数 k, l ，向量组 $\alpha_1 + k\alpha_3, \alpha_2 + l\alpha_3$ 线性无关是向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关的 ()

- (A) 必要非充分条件. (B)充分非必要条件.
 (C) 充分必要条件. (D)既非充分也非必要条件.
 (7) 设随机事件 A 与 B 相互独立, 且 $P(B)=0.5$, $P(A-B)=0.3$, 则 $P(B-A)=$ ()
 (A) 0.1 (B)0.2 (C)0.3 (D)0.4
 (8) 设连续性随机变量 X_1 与 X_2 相互独立, 且方差均存在, X_1 与 X_2 的概率密度分别为 $f_1(x)$ 与 $f_2(x)$, 随机变量 Y_1 的概率密度为 $f_{Y_1}(y) = \frac{1}{2}[f_1(y)+f_2(y)]$, 随机变量 $Y_2 = \frac{1}{2}(X_1 + X_2)$. 则 ()
 (A) $EY_1 > EY_2$, $DY_1 > DY_2$ (B) $EY_1 = EY_2$, $DY_1 = DY_2$
 (C) $EY_1 = EY_2$, $DY_1 < DY_2$ (D) $EY_1 = EY_2$, $DY_1 > DY_2$

二、填空题: 9~14 小题, 每小题 4 分, 共 24 分, 请将答案写在答题纸指定位置上。

- (9) 曲面 $z = x^2(1 - \sin y) + y^2(1 - \sin x)$ 在点 $(1, 0, 1)$ 处的切平面方程为_____.
- (10) 设 $f(x)$ 是周期为 4 的可导奇函数, 且 $f'(x) = 2x - 1$, $x \in [0, 2]$, 则 $f(7) =$ _____.
- (11) 微分方程 $xy' + y(\ln x - \ln y) = 0$ 满足条件 $y(1) = e^3$ 的解为 $y =$ _____.
- (12) 设 L 是柱面 $x^2 + y^2 = 1$ 与平面 $y + z = 0$ 的交线, 从 z 轴正向往 z 轴负向看去为逆时针方向, 则曲面积分 $[\int] z dx + y dz =$ _____.
- (13) 设二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 - x_2^2 + 2ax_1x_3 + 4x_2x_3$ 的负惯性指数是 1, 则 a 的取值范围_____.
- (14) 设总体 X 的概率密度为 $f(x, \theta) = \begin{cases} \frac{2x}{3\theta^2}, & \theta < x < 2\theta, \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$, 其中 θ 是未知数,

X_1, X_2, \dots, X_n 为来自总体 X 的简单样本, 若 $c \sum_{i=1}^n x_i^2$ 是 θ 的无偏估计, 则 $c =$ _____.

三、解答题: 15~23 小题, 共 94 分, 请将解答写在答题纸指定位置上解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

(15) (本题满分 10 分)

求极限 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\int_1^x [t^2(e^{\frac{1}{t}} - 1) - t] dt}{x^2 \ln(1 + \frac{1}{x})}$.

(16) (本题满分 10 分)

设函数 $y = f(x)$ 由方程 $y^3 + xy^2 + x^2y + 6 = 0$ 确定, 求 $f(x)$ 的极值.

(17) (本题满分 10 分)

设函数 $f(u)$ 二阶连续可导, $z = f(e^x \cos y)$ 满足

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = (4z + e^x \cos y)e^{2x},$$

若 $f(0) = 0, f'(0) = 0$, 求 $f(u)$ 的表达式。

(18) (本题满分 10 分)

设 Σ 为曲面 $z = x^2 + y^2 (z \leq 1)$ 的上侧, 计算曲面积分

$$I = \iint_{\Sigma} (x-1)^3 dydz + (y-1)^3 dzdx + (z-1)dxdy.$$

(19) (本题满分 10 分) 设数列 $\{a_n\}$ 、 $\{b_n\}$ 满足 $0 < a_n < \frac{\pi}{2}, 0 < b_n < \frac{\pi}{2}$,

$\cos a_n - a_n = \cos b_n$, 且级数 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛。

(I) 证明: $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ 。

(II) 证明: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{b_n}$ 收敛。

(20) (本题满分 11 分)

设 $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & -3 \end{pmatrix}$, E 为三阶单位矩阵。

(I) 求方程组 $AX = O$ 的一个基础解系。

(II) 求满足 $AB = E$ 的所有矩阵 B 。

(21) (本题满分 11 分) 证明 n 阶矩阵 $\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$ 与 $\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & n \end{pmatrix}$ 相似。

(22) (本题满分 11 分) 设随机变量 X 的概率分布为 $P\{X = 1\} = P\{X = 2\} = \frac{1}{2}$,

在给定 $X = i$ 的条件下, 随机变量 Y 服从均匀分布 $U(0, i) (i = 1, 2)$ 。

(I) 求 Y 得分布函数 $F_Y(y)$ 。

(II) 求 EY 。

(23) (本题满分 11 分) 设总体 X 的分布函数 $F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \frac{x^2}{\theta}, & 0 \leq x < \theta \\ 1 - e^{-\frac{x^2}{\theta}}, & x \geq \theta \end{cases}$, 其中 $\theta > 0$ 为未

知参数， X_1, X_2, \dots, X_n 为来自总体 X 的简单随机样本。

(I) 求 EX 及 EX^2 。

(II) 求 θ 的最大似然估计量 $\hat{\theta}$ 。

(III) 是否存在实数 a ，使得对任意的 $\varepsilon > 0$ ，都有 $\lim_{n \rightarrow \infty} P\{|\hat{\theta} - a| \geq \varepsilon\} = 0$ ？