

2012 年全国硕士研究生入学统一考试

数学一试题解析

一、选择题：1~8 小题，每小题 4 分，共 32 分，下列每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目要求的，请将所选项前的字母填在答题纸指定位置上。

(1) 曲线 $y = \frac{x^2 + x}{x^2 - 1}$ 渐近线的条数为 ()

- (A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3

(2) 设函数 $f(x) = (e^x - 1)(e^{2x} - 2) \cdots (e^{nx} - n)$ ，其中 n 为正整数，则 $f'(0) =$

- (A) $(-1)^{n-1}(n-1)!$ (B) $(-1)^n(n-1)!$

- (C) $(-1)^{n-1}n!$ (D) $(-1)^n n!$

(3) 如果 $f(x, y)$ 在 $(0, 0)$ 处连续，那么下列命题正确的是 ()

(A) 若极限 $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{f(x, y)}{|x| + |y|}$ 存在，则 $f(x, y)$ 在 $(0, 0)$ 处可微

(B) 若极限 $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{f(x, y)}{x^2 + y^2}$ 存在，则 $f(x, y)$ 在 $(0, 0)$ 处可微

(C) 若 $f(x, y)$ 在 $(0, 0)$ 处可微，则极限 $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{f(x, y)}{|x| + |y|}$ 存在

(D) 若 $f(x, y)$ 在 $(0, 0)$ 处可微，则极限 $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{f(x, y)}{x^2 + y^2}$ 存在

(4) 设 $I_k = \int_0^{k\pi} e^{x^2} \sin x dx$ ($k=1, 2, 3$), 则有 D

- (A) $I_1 < I_2 < I_3$ (B) $I_3 < I_2 < I_1$

- (C) $I_2 < I_3 < I_1$ (D) $I_2 < I_1 < I_3$

(5) 设 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ c_1 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ c_2 \end{pmatrix}, \alpha_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ c_3 \end{pmatrix}, \alpha_4 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ c_4 \end{pmatrix}$ 其中 c_1, c_2, c_3, c_4 为任意常数，则下列向量组线性相

关的是 ()

- (A) $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ (B) $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4$

(C) $\alpha_1, \alpha_3, \alpha_4$

(D) $\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$

(6) 设 A 为 3 阶矩阵, P 为 3 阶可逆矩阵, 且 $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 2 \end{pmatrix}$, $P = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$,

$Q = (\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2, \alpha_3)$ 则 $Q^{-1}AQ =$ ()

(A) $\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 2 & \\ & & 1 \end{pmatrix}$

(B) $\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 2 \end{pmatrix}$

(C) $\begin{pmatrix} 2 & & \\ & 1 & \\ & & 2 \end{pmatrix}$

(D) $\begin{pmatrix} 2 & & \\ & 2 & \\ & & 1 \end{pmatrix}$

(7) 设随机变量 X 与 Y 相互独立, 且分别服从参数为 1 与参数为 4 的指数分布, 则 $P\{X < Y\} =$ ()

(A) $\frac{1}{5}$

(B) $\frac{1}{3}$

(C) $\frac{2}{5}$

(D) $\frac{4}{5}$

(8) 将长度为 1m 的木棒随机地截成两段, 则两段长度的相关系数为 ()

(A) 1

(B) $\frac{1}{2}$

(C) $-\frac{1}{2}$

(D) -1

二、填空题: 9—14 小题, 每小题 4 分, 共 24 分, 请将答案写在答题纸指定位置上.

(9) 若函数 $f(x)$ 满足方程 $f''(x) + f'(x) - 2f(x) = 0$ 及 $f'(x) + f(x) = 2e^x$, 则 $f(x) =$ _____。

(10) $\int_0^2 x\sqrt{2x-x^2} dx$ _____。

(11) $\text{grad}\left(xy + \frac{z}{y}\right)\Big|_{(2,1,1)}$ _____。

(12) 设 $\Sigma = \{(x, y, z) | x + y + z = 1, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0\}$, 则 $\iint_{\Sigma} y^2 dS =$ _____。

(13) 设 X 为三维单位向量, E 为三阶单位矩阵, 则矩阵 $E - xx^T$ 的秩为_____。

(14) 设 A, B, C 是随机事件, A, C 互不相容, $P(AB) = \frac{1}{2}, P(C) = \frac{1}{3}$, 则 $P(AB | \bar{C}) =$ _____。

三、解答题: 15—23 小题, 共 94 分. 请将解答写在答题纸指定位置上. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

(15) (本题满分 10 分)

证明: $x \ln \frac{1+x}{1-x} + \cos x \geq 1 + \frac{x^2}{2}, -1 < x < 1$

(16) (本题满分 10 分)

求 $f(x, y) = xe^{-\frac{x^2+y^2}{2}}$ 的极值。

(17) (本题满分 10 分)

求幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{4n^2 + 4n + 3}{2n+1} x^{2n}$ 的收敛域及和函数

(18) (本题满分 10 分)

已知曲线 $L: \begin{cases} x = f(t) \\ y = \cos t \end{cases} \left(0 \leq t < \frac{\pi}{2} \right)$, 其中函数 $f(t)$ 具有连续导数, 且 $f(0) = 0, f(t) > 0 \left(0 < t < \frac{\pi}{2} \right)$

。若曲线 L 的切线与 x 轴的交点到切点的距离恒为 1, 求函数 $f(t)$ 的表达式, 并求此曲线 L 与 x 轴与 y 轴无边界的区域的面积。

(19) (本题满分 10 分)

$x = 0 (0 \leq y \leq 2)$, 并设 L 及 L_1 所围的平面区域为 D 已知 L 是第一象限中从点 $(0, 0)$ 沿圆周 $x^2 + y^2 = 2x$ 到点 $(2, 0)$, 再沿圆周 $x^2 + y^2 = 4$ 到点 $(0, 2)$ 的曲线段, 计算曲线积分 $J = \int_L 3x^2 y dx + (x^3 + x - 2y) dy$ 。

(20) (本题满分 11 分)

设 $A = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & 1 & a \\ a & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \beta = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

(I) 求 $|A|$

(II) 已知线性方程组 $Ax = \beta$ 有无穷多解, 求 a , 并求 $Ax = \beta$ 的通解。

(21) (本题满分 11 分) 三阶矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & a \\ 0 & a & -1 \end{pmatrix}$, A^T 为矩阵 A 的转置, 已知 $r(A^T A) = 2$, 且二次

型 $f = x^T A^T A x$ 。

1) 求 a

2) 求二次型对应的二次型矩阵, 并将二次型化为标准型, 写出正交变换过程。

(22) (本题满分 11 分)

已知随机变量 X, Y 以及 XY 的分布律如下表所示,

X	0	1	2
P	1/2	1/3	1/6

Y	0	1	2
P	1/3	1/3	1/3

XY	0	1	2	4
P	7/12	1/3	0	1/12

求：(1) $P(X = 2Y)$;

(2) $\text{cov}(X - Y, Y)$ 与 ρ_{XY} .

(23) (本题满分 11 分)

设随机变量 X 与 Y 相互独立且分别服从正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$ 与 $N(\mu, 2\sigma^2)$, 其中 σ 是未知参数且 $\sigma > 0$,

设 $Z = X - Y$,

(1) 求 z 的概率密度 $f(z, \sigma^2)$;

(2) 设 z_1, z_2, \dots, z_n 为来自总体 Z 的简单随机样本, 求 σ^2 的最大似然估计量 $\bar{\sigma}^2$;

(3) 证明 $\bar{\sigma}^2$ 为 σ^2 的无偏估计量。