

2014 年全国硕士研究生入学统一考试数学二试题

一、选择题:1~8 小题,每小题 4 分,共 32 分.下列每题给出的四个选项中,只有一个选项符合题目要求的,请将所选项前的字母填在答题纸指定位置上.

(1) 当 $x \rightarrow 0^+$ 时,若 $\ln^\alpha(1+2x)$, $(1-\cos x)^{\frac{1}{\alpha}}$ 均是比 x 高阶的无穷小,则 α 的取值范围是 ()

- (A) $(2, +\infty)$ (B) $(1, 2)$ (C) $(\frac{1}{2}, 1)$ (D) $(0, \frac{1}{2})$

(2) 下列曲线中有渐近线的是 ()

(A) $y = x + \sin x$ (B) $y = x^2 + \sin x$

(C) $y = x + \sin \frac{1}{x}$ (D) $y = x^2 + \sin \frac{1}{x}$

(3) 设函数 $f(x)$ 具有 2 阶导数, $g(x) = f(0)(1-x) + f(1)x$, 则在区间 $[0, 1]$ 上 ()

- (A) 当 $f'(x) \geq 0$ 时, $f(x) \geq g(x)$ (B) 当 $f'(x) \geq 0$ 时, $f(x) \leq g(x)$
(C) 当 $f''(x) \geq 0$ 时, $f(x) \geq g(x)$ (D) 当 $f''(x) \geq 0$ 时, $f(x) \leq g(x)$

(4) 曲线 $\begin{cases} x = t^2 + 7 \\ y = t^2 + 4t + 1 \end{cases}$ 上对应于 $t = 1$ 的点处的曲率半径是

()

- (A) $\frac{\sqrt{10}}{50}$ (B) $\frac{\sqrt{10}}{100}$ (C) $10\sqrt{10}$ (D) $5\sqrt{10}$

(5) 设函数 $f(x) = \arctan x$, 若 $f(x) = xf'(\xi)$, 则 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\xi^2}{x^2} =$

()

- (A) 1 (B) $\frac{2}{3}$ (C) $\frac{1}{2}$ (D) $\frac{1}{3}$

(6) 设函数 $u(x, y)$ 在有界闭区域 D 上连续, 在 D 的内部具有 2 阶连续偏导数, 且满足

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \neq 0 \text{ 及 } \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \text{ 则}$$

()

- (A) $u(x, y)$ 的最大值和最小值都在 D 的边界上取得
- (B) $u(x, y)$ 的最大值和最小值都在 D 的内部上取得
- (C) $u(x, y)$ 的最大值在 D 的内部取得, 最小值在 D 的边界上取得
- (D) $u(x, y)$ 的最小值在 D 的内部取得, 最大值在 D 的边界上取得

(7) 行列式 $\begin{vmatrix} 0 & a & b & 0 \\ a & 0 & 0 & b \\ 0 & c & d & 0 \\ c & 0 & 0 & d \end{vmatrix} =$ ()

- (A) $(ad - bc)^2$
- (B) $-(ad - bc)^2$
- (C) $a^2d^2 - b^2c^2$
- (D) $b^2c^2 - a^2d^2$

(8) 设 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 均为 3 维向量, 则对任意常数 k, l , 向量组 $\alpha_1 + k\alpha_3, \alpha_2 + l\alpha_3$ 线性无关是向量组

$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关的

()

- (A) 必要非充分条件
- (B) 充分非必要条件
- (C) 充分必要条件
- (D) 既非充分也非必要条件

二、填空题: 9~14 小题, 每小题 4 分, 共 24 分. 请将答案写在答题纸指定位置上.

(9) $\int_{-\infty}^1 \frac{1}{x^2 + 2x + 5} dx =$ _____.

(10) 设 $f(x)$ 是周期为 4 的可导奇函数, 且 $f'(x) = 2(x-1)$, $x \in [0, 2]$, 则 $f(7) =$ _____.

(11) 设 $z = z(x, y)$ 是由方程 $e^{2yz} + x + y^2 + z = \frac{7}{4}$ 确定的函数, 则 $dz \Big|_{(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})} =$ _____.

(12) 曲线 $r = r(\theta)$ 的极坐标方程是 $r = \theta$, 则 L 在点 $(r, \theta) = (\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ 处的切线的直角坐标方程是 _____.

(13) 一根长为 1 的细棒位于 x 轴的区间 $[0, 1]$

上, 若其线密度 $\rho(x) = -x^2 + 2x + 1$, 则该细棒的质心坐标 $\bar{x} =$ _____.

(14) 设二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 - x_2^2 + 2ax_1x_3 + 4x_2x_3$ 的负惯性指数为 1, 则 a 的取值范围为 _____.

三、解答题: 15~23 小题, 共 94 分. 请将解答写在答题纸指定位置上. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

(15) (本题满分 10 分)

$$\text{求极限 } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\int_1^x \left[t^2 \left(e^{\frac{1}{t}} - 1 \right) - t \right] dt}{x^2 \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right)}.$$

(16) (本题满分 10 分)

已知函数 $y = y(x)$ 满足微分方程 $x^2 + y^2 y' = 1 - y'$, 且 $y(2) = 0$, 求 $y(x)$ 的极大值与极小值.

(17) (本题满分 10 分)

设平面区域 $D = \{(x, y) | 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, x \geq 0, y \geq 0\}$, 计算 $\iint_D \frac{x \sin(\pi \sqrt{x^2 + y^2})}{x + y} dx dy$.

(18) (本题满分 10 分)

设函数 $f(u)$ 具有二阶连续导数, $z = f(e^x \cos y)$ 满足 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = (4z + e^x \cos y) e^{2x}$, 若

$f(0) = 0, f'(0) = 0$, 求 $f(u)$ 的表达式.

(19) (本题满分 10 分)

设函数 $f(x), g(x)$ 的区间 $[a, b]$ 上连续, 且 $f(x)$ 单调增加, $0 \leq g(x) \leq 1$. 证明:

$$(I) 0 \leq \int_a^x g(t) dt \leq x - a, x \in [a, b],$$

$$(II) \int_a^{a+\int_a^b g(t) dt} f(x) dx \leq \int_a^b f(x) g(x) dx.$$

(20) (本题满分 11 分)

设函数 $f(x) = \frac{x}{1+x}, x \in [0, 1]$, 定义函数列 $f_1(x) = f(x), f_2(x) = f(f_1(x)), \dots,$

$f_n(x) = f(f_{n-1}(x)), \dots$, 记 S_n 是由曲线

$y = f_n(x)$, 直线 $x = 1$ 及 x 轴所围成平面图形的面积, 求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} nS_n$.

(21) (本题满分 11 分)

已知函数 $f(x, y)$ 满足 $\frac{\partial f}{\partial y} = 2(y+1)$, 且 $f(y, y) = (y+1)^2 - (2-y)\ln y$, 求曲线

$f(x, y) = 0$ 所围成的图形绕直线 $y = -1$ 旋转所成的旋转体的体积.

(22) (本题满分 11 分)

设矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & -3 \end{pmatrix}$, E 为三阶单位矩阵.

(I) 求方程组 $Ax = 0$ 的一个基础解系;

(II) 求满足 $AB = E$ 的所有矩阵.

(23) (本题满分 11 分)

证明 n 阶矩阵 $\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$ 与 $\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & n \end{pmatrix}$ 相似.

