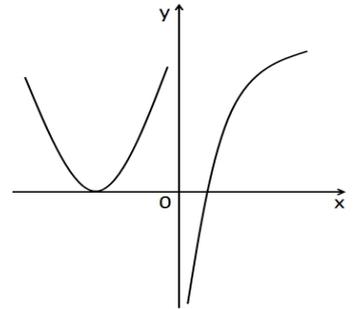


## 2015 年全国硕士研究生入学统一考试数学（一）

一、选择题:1~8 小题,每小题 4 分,共 32 分.下列每题给出的四个选项中,只有一个选项符合题目要求的,请将所选项前的字母填在答题纸指定位置上.

(1) 设函数  $f(x)$  在  $(-\infty, +\infty)$  内连续, 其中二阶导数  $f''(x)$  的图形如图所示, 则曲线  $y = f(x)$  的拐点的个数为 ( )

- (A) 0            (B) 1            (C) 2            (D) 3



(2) 设  $y = \frac{1}{2}e^{2x} + (x - \frac{1}{3})e^x$  是二阶常系数非齐次线性微分方程  $y'' + ay' + by = ce^x$  的一个特解, 则 ( )

- (A)  $a = -3, b = 2, c = -1$   
 (B)  $a = 3, b = 2, c = -1$   
 (C)  $a = -3, b = 2, c = 1$   
 (D)  $a = 3, b = 2, c = 1$

(3) 若级数  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  条件收敛, 则  $x = \sqrt{3}$  与  $x = 3$  依次为幂级数  $\sum_{n=1}^{\infty} na_n(x-1)^n$  的 ( )

- (A) 收敛点, 收敛点  
 (B) 收敛点, 发散点  
 (C) 发散点, 收敛点  
 (D) 发散点, 发散点

(4) 设  $D$  是第一象限由曲线  $2xy = 1$ ,  $4xy = 1$  与直线  $y = x$ ,  $y = \sqrt{3}x$  围成的平面区域, 函数  $f(x, y)$  在  $D$  上连续, 则  $\iint_D f(x, y) dx dy = ( )$

$$(A) \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} d\theta \int_{\frac{1}{2\sin 2\theta}}^{\frac{1}{\sin 2\theta}} f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr$$

$$(B) \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} d\theta \int_{\frac{1}{\sqrt{2\sin 2\theta}}}^{\frac{1}{\sqrt{\sin 2\theta}}} f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr$$

$$(C) \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} d\theta \int_{\frac{1}{2\sin 2\theta}}^{\frac{1}{\sin 2\theta}} f(r \cos \theta, r \sin \theta) dr$$

$$(D) \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} d\theta \int_{\frac{1}{\sqrt{2\sin 2\theta}}}^{\frac{1}{\sqrt{\sin 2\theta}}} f(r \cos \theta, r \sin \theta) dr$$

(5) 设矩阵  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & a \\ 1 & 4 & a^2 \end{pmatrix}$ ,  $b = \begin{pmatrix} 1 \\ d \\ d^2 \end{pmatrix}$ , 若集合  $\Omega = \{1, 2\}$ , 则线性方程组  $Ax = b$

有无穷多解的充分必要条件为

( )

(A)  $a \notin \Omega, d \notin \Omega$

(B)  $a \notin \Omega, d \in \Omega$

(C)  $a \in \Omega, d \notin \Omega$

(D)  $a \in \Omega, d \in \Omega$

(6) 设二次型  $f(x_1, x_2, x_3)$  在正交变换为  $\mathbf{x} = \mathbf{P}\mathbf{y}$  下的标准形为  $2y_1^2 + y_2^2 - y_3^2$ , 其中  $\mathbf{P} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ , 若  $\mathbf{Q} = (\mathbf{e}_1, -\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_2)$ , 则  $f(x_1, x_2, x_3)$  在正交变换  $\mathbf{x} = \mathbf{Q}\mathbf{y}$  下的标准形为( )

(A)  $2y_1^2 - y_2^2 + y_3^2$

(B)  $2y_1^2 + y_2^2 - y_3^2$

(C)  $2y_1^2 - y_2^2 - y_3^2$

(D)  $2y_1^2 + y_2^2 + y_3^2$

(7) 若 A,B 为任意两个随机事件, 则 ( )

(A)  $P(AB) \leq P(A)P(B)$  (B)  $P(AB) \geq P(A)P(B)$

(C)  $P(AB) \leq \frac{P(A)P(B)}{2}$  (D)  $P(AB) \geq \frac{P(A)P(B)}{2}$

(8) 设随机变量  $X, Y$  不相关, 且  $EX = 2, EY = 1, DX = 3$ , 则  $E[X(X+Y-2)] =$   
( )

(A) -3 (B) 3 (C) -5 (D) 5

二、填空题: 9~14 小题, 每小题 4 分, 共 24 分. 请将答案写在答题纸指定位置上.

(9)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \cos x}{x^2} =$  \_\_\_\_\_.

(10)  $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left( \frac{\sin x}{1 + \cos x} + |x| \right) dx =$  \_\_\_\_\_.

(11) 若函数  $z = z(x, y)$  由方程  $e^x + xyz + x + \cos x = 2$  确定, 则  $dz|_{(0,1)} =$  \_\_\_\_\_.

(12) 设  $\Omega$  是由平面  $x + y + z = 1$  与三个坐标平面平面所围成的空间区域, 则

$\iiint_{\Omega} (x + 2y + 3z) dx dy dz =$  \_\_\_\_\_.

(13)  $n$  阶行列式  $\begin{vmatrix} 2 & 0 & \cdots & 0 & 2 \\ -1 & 2 & \cdots & 0 & 2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 2 & 2 \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & 2 \end{vmatrix} =$  \_\_\_\_\_.

(14) 设二维随机变量  $(x, y)$  服从正态分布  $N(1, 0, 1, 1, 0)$ , 则

$P\{XY - Y < 0\} =$  \_\_\_\_\_.

三、解答题: 15~23 小题, 共 94 分. 请将解答写在答题纸指定位置上. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

(15)(本题满分 10 分) 设函数  $f(x) = x + a \ln(1+x) + bx \sin x$ ,  $g(x) = kx^3$ , 若  $f(x)$  与  $g(x)$  在  $x \rightarrow 0$  是等价无穷小, 求  $a, b, k$  的值.

(16)(本题满分 10 分) 设函数  $f(x)$  在定义域  $I$  上的导数大于零, 若对任意的  $x_0 \in I$ , 由线  $y=f(x)$  在点  $(x_0, f(x_0))$  处的切线与直线  $x = x_0$  及  $x$  轴所围成区域的面积恒为 4, 且  $f(0) = 2$ , 求  $f(x)$  的表达式.

(17)(本题满分 10 分)

已知函数  $f(x, y) = x + y + xy$ , 曲线  $C: x^2 + y^2 + xy = 3$ , 求  $f(x, y)$  在曲线  $C$  上的最大方向导数.

(18)(本题满分 10 分)

(I) 设函数  $u(x), v(x)$  可导, 利用导数定义证明

$$[u(x)v(x)]' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$$

(II) 设函数  $u_1(x), u_2(x), \dots, u_n(x)$  可导,  $f(x) = u_1(x)u_2(x) \cdots u_n(x)$ , 写出  $f(x)$  的求导公式.

(19)(本题满分 10 分)

已知曲线  $L$  的方程为  $\begin{cases} z = \sqrt{2-x^2-y^2}, \\ z = x, \end{cases}$  起点为  $A(0, \sqrt{2}, 0)$ , 终点为  $B(0, -\sqrt{2}, 0)$ ,

计算曲线积分  $I = \int_L (y+z)dx + (z^2 - x^2 + y)dy + (x^2 + y^2)dz$ .

(20)(本题满 11 分)

设向量组  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  内  $\mathbb{R}^3$  的一个基,  $\beta_1 = 2\alpha_1 + 2k\alpha_3$ ,  $\beta_2 = 2\alpha_2$ ,  $\beta_3 = \alpha_1 + (k+1)\alpha_3$ .

(I) 证明向量组  $\beta_1, \beta_2, \beta_3$  为  $\mathbb{R}^3$  的一个基;

(II) 当  $k$  为何值时, 存在非 0 向量  $\xi$  在基  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  与基  $\beta_1, \beta_2, \beta_3$  下的坐标相同,

并求所有的  $\xi$ .

(21) (本题满分 11 分)

设矩阵  $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -3 \\ -1 & 3 & -3 \\ 1 & -2 & a \end{pmatrix}$  相似于矩阵  $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ .

(I) 求  $a, b$  的值;

(II) 求可逆矩阵  $P$ , 使  $P^{-1}AP$  为对角矩阵..

(22) (本题满分 11 分) 设随机变量  $X$  的概率密度为  $f(x) = \begin{cases} 2^{-x} \ln 2, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0. \end{cases}$

对  $X$  进行独立重复的观测, 直到 2 个大于 3 的观测值出现的停止. 记  $Y$  为观测次数.

(I) 求  $Y$  的概率分布;

(II) 求  $EY$

(23) (本题满分 11 分) 设总体  $X$  的概率密度为:

$$f(x, \theta) = \begin{cases} \frac{1}{1-\theta}, & \theta \leq x \leq 1, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

其中  $\theta$  为未知参数,  $x_1, x_2, \dots, x_n$  为来自该总体的简单随机样本.

(I) 求  $\theta$  的矩估计量.

(II) 求  $\theta$  的最大似然估计量.