

一、 选择: 1~8 小题, 每小题 4 分, 共 32 分. 下列每题给出的四个选项中, 只有一个选项是符合要求的.

(1) 设  $a_1 = x(\cos \sqrt{x} - 1)$ ,  $a_2 = \sqrt{x} \ln(1 + \sqrt[3]{x})$ ,  $a_3 = \sqrt[3]{x+1} - 1$ . 当  $x \rightarrow 0^+$  时,

以上 3 个无穷小量按照从低阶到高阶拓排序是

(A)  $a_1, a_2, a_3$ . (B)  $a_2, a_3, a_1$ .

(C)  $a_2, a_1, a_3$ . (D)  $a_3, a_2, a_1$ .

(2) 已知函数  $f(x) = \begin{cases} 2(x-1), & x < 1, \\ \ln x, & x \geq 1, \end{cases}$  则  $f(x)$  的一个原函数是

(A)  $F(x) = \begin{cases} (x-1)^2, & x < 1. \\ x(\ln x - 1), & x \geq 1. \end{cases}$  (B)  $F(x) = \begin{cases} (x-1)^2, & x < 1. \\ x(\ln x + 1) - 1, & x \geq 1. \end{cases}$

(C)  $F(x) = \begin{cases} (x-1)^2, & x < 1. \\ x(\ln x + 1) + 1, & x \geq 1. \end{cases}$  (D)  $F(x) = \begin{cases} (x-1)^2, & x < 1. \\ x(\ln x - 1) + 1, & x \geq 1. \end{cases}$

(3) 反常积分 ①  $\int_{-\infty}^0 \frac{1}{x^2} e^x dx$ , ②  $\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2} e^x dx$  的敛散性为

(A) ① 收敛, ② 收敛. (B) ① 收敛, ② 发散.

(C) ① 收敛, ② 收敛. (D) ① 收敛, ② 发散.

(4) 设函数  $f(x)$  在  $(-\infty, +\infty)$  内连续, 求导函数的图形如图所示, 则

(A) 函数  $f(x)$  有 2 个极值点, 曲线  $y = f(x)$  有 2 个拐点.

(B) 函数  $f(x)$  有 2 个极值点, 曲线  $y = f(x)$  有 3 个拐点.

(C) 函数  $f(x)$  有 3 个极值点, 曲线  $y = f(x)$  有 1 个拐点.

(D) 函数  $f(x)$  有 3 个极值点, 曲线  $y = f(x)$  有 2 个拐点.

(5) 设函数  $f_i(x) (i=1, 2)$  具有二阶连续导数, 且  $f_i(x_0) < 0 (i=1, 2)$ , 若两条曲线  $y = f_i(x) (i=1, 2)$  在点  $(x_0, y_0)$  处具有公切线  $y = g(x)$ , 且在该点处曲线  $y = f_1(x)$  的曲率大于曲线  $y = f_2(x)$  的曲率, 则在  $x_0$  的某个领域内, 有

(A)  $f_1(x) \leq f_2(x) \leq g(x)$

(B)  $f_2(x) \leq f_1(x) \leq g(x)$

(C)  $f_1(x) \leq g(x) \leq f_2(x)$

(D)  $f_2(x) \leq g(x) \leq f_1(x)$

(6) 已知函数  $f(x, y) = \frac{e^x}{x-y}$ , 则

(A)  $f'_x - f'_y = 0$

(B)  $f'_x + f'_y = 0$

(C)  $f'_x - f'_y = f$

(D)  $f'_x + f'_y = f$

(7) 设  $A, B$  是可逆矩阵, 且  $A$  与  $B$  相似, 则下列结论错误的是

(A)  $A^T$  与  $B^T$  相似

(B)  $A^{-1}$  与  $B^{-1}$  相似

(C)  $A + A^T$  与  $B + B^T$  相似

(D)  $A + A^{-1}$  与  $B + B^{-1}$  相似

(8) 设二次型  $f(x_1, x_2, x_3) = a(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) + 2x_1x_2 + 2x_2x_3 + 2x_1x_3$  的正、负惯性指数分别为 1, 2, 则

(A)  $a > 1$

(B)  $a < -2$

(C)  $-2 < a < 1$

(D)  $a = 1$  与  $a = -2$

二、填空题: 9~14 小题, 每小题 4 分, 共 24 分。

(9) 曲线  $y = \frac{x^3}{1+x^2} + \arctan(1+x^2)$  的斜渐近线方程为\_\_\_\_\_.

(10) 极限  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} (\sin \frac{1}{n} + 2 \sin \frac{2}{n} + \dots + n \sin \frac{n}{n}) =$ \_\_\_\_\_.

(11) 以  $y = x^2 - e^x$  和  $y = x^2$  为特解的一阶非齐次线性微分方程为\_\_\_\_\_.

(12) 已知函数  $f(x)$  在  $(-\infty, +\infty)$  上连续, 且  $f(x) = (x+1)^2 + 2 \int_0^x f(t) dt$ , 则当  $n \geq 2$

时,  $f^{(n)}(0) = \underline{\hspace{2cm}}$ .

(13) 已知动点  $P$  在曲线  $y = x^3$  上运动, 记坐标原点与点  $P$  间的距离为  $l$ . 若点  $P$  的横坐标时间的变化率为常数  $v_0$ , 则当点  $P$  运动到点  $(1, 1)$  时,  $l$  对时间的变化率是

$\underline{\hspace{2cm}}$ .

(14) 设矩阵  $\begin{bmatrix} a & -1 & -1 \\ -1 & a & -1 \\ -1 & -1 & a \end{bmatrix}$  与  $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$  等价, 则  $a = \underline{\hspace{2cm}}$ .

解答题: 15~23 小题, 共 94 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

(15) (本题满分 10 分)

(16) (本题满分 10 分)

设函数  $f(x) = \int_0^1 |t^2 - x^2| dt (x > 0)$ , 求  $f'(x)$  并求  $f(x)$  的最小值.

(17) (本题满分 10 分)

已知函数  $z = z(x, y)$  由方程  $(x^2 + y^2)z + \ln z + 2(x + y + 1) = 0$  确定, 求  $z = z(x, y)$  的极值.

(18) (本题满分 10 分)

设  $D$  是由直线  $y = 1$ ,  $y = x$ ,  $y = -x$  围成的有界区域, 计算二重积分

$$\iint_D \frac{x^2 - xy - y^2}{x^2 + y^2} dx dy.$$

(19) (本题满分 10 分)

已知  $y_1(x) = e^x$ ,  $y_2(x) = u(x)e^x$  是二阶微分方程  $(2x-1)y'' - (2x+1)y' + 2y = 0$  的解,

若  $u(-1) = e$ ,  $u(0) = -1$ , 求  $u(x)$ , 并写出该微分方程的通解.

(20) (本题满分 11 分)

设  $D$  是由曲线  $y = \sqrt{1-x^2} (0 \leq x \leq 1)$  与  $\begin{cases} x = \cos^3 t \\ y = \sin^3 t \end{cases} (0 \leq t \leq \frac{\pi}{2})$  围成的平面区域, 求  $D$  绕

$x$  轴旋转一周所得旋转体的体积和表面积.

(21) (本题满分 11 分)

已知  $f(x)$  在  $[0, \frac{3\pi}{2}]$  上连续, 在  $(0, \frac{3\pi}{2})$  内是函数  $\frac{\cos x}{2x-3\pi}$  的一个原函数  $f(0) = 0$ .

(I) 求  $f(x)$  在区间  $[0, \frac{3\pi}{2}]$  上的平均值;

(II) 证明  $f(x)$  在区间  $(0, \frac{3\pi}{2})$  内存在唯一零点。

(22) (本题满分 11 分)

设矩阵  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1-a \\ 1 & 0 & a \\ a+1 & 1 & a+1 \end{pmatrix}$ ,  $\beta = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2a-2 \end{pmatrix}$ , 且方程组  $Ax = \beta$  无解。

(I) 求  $a$  的值;

(II) 求方程组  $A^T Ax = A^T \beta$  的通解。

(23) (本题满分 11 分)

已知矩阵  $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

(I) 求  $A^{99}$

(II) 设 3 阶矩阵  $B = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$  满足  $B^2 = BA$ 。记  $B^{100} = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)$ , 将  $\beta_1, \beta_2, \beta_3$  分别表示为  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  的线性组合。